SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $U_0 = 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{Un}{2+Un^2} > 0$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$

2°/

a) $U_{n+1} - \frac{1}{2} U_n = \dfrac{Un}{2+Un^2} - \dfrac{1}{2} U_n = \dfrac{2U_n - 2U_n - U_n^3}{2(2+U_n^2)} = \dfrac{-U_n^3}{2+U_n^2} < 0$

D'où pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

b) Pour n = 0 , on a : $U_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$1 \leq 1$ vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$: et $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; Montrons que $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \dfrac{1}{2} U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Or : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$ D'où : $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/ On a : $\begin{cases} 0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \left(\dfrac{1}{2} \in]-1,1[\right) \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

4°/ a) $S_{n+1} - S_n = (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n)$

$= U_{n+1} > 0$

D'où : (S_n) est croissante .